Estruturas de Dados

Aula 12 — Tabelas Hash

Prof[a] Ana Carolina Sokolonski

Bacharelado em Sistemas de Informação
Instituto Federal da Bahia — Campus Feira de Santana

2026

Agenda

Motivação

Definição

Funções de Hash

Colisões

Implementação

Exercício

Motivação

Por quê precisamos de Tabelas Hash?

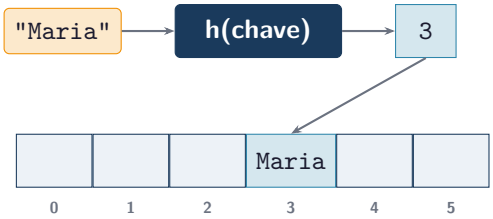
O Problema da Busca Eficiente

▪ Limitações das estruturas anteriores

Em **listas** e **vetores** não ordenados a busca é $O(N)$.
Em **ABBs** balanceadas (AVL) a busca é $O(\log N)$.
Mas e se quiséssemos tempo **constante** $O(1)$?

▪ Solução: Tabelas Hash

Estrutura que associa uma **chave** a uma **posição** no vetor por meio de uma **função de hash**, permitindo busca, inserção e remoção em $O(1)$ no caso médio.



Acesso direto: $O(1)$

Comparativo de Estruturas

Estrutura	Busca	Inserção	Remoção
Vetor não ordenado	$O(N)$	$O(1)$	$O(N)$
Vetor ordenado	$O(\log N)$	$O(N)$	$O(N)$
Lista encadeada	$O(N)$	$O(1)$	$O(N)$
ABB (pior caso)	$O(N)$	$O(N)$	$O(N)$
AVL / Rubro-negra	$O(\log N)$	$O(\log N)$	$O(\log N)$
Tabela Hash (médio)	$\mathbf{O(1)}$	$\mathbf{O(1)}$	$\mathbf{O(1)}$
Tabela Hash (pior)	$O(N)$	$O(N)$	$O(N)$

▪ Atenção

No **pior caso** (muitas colisões), a tabela hash degrada para $O(N)$. Por isso a escolha da **função de hash** e o **tratamento de colisões** é crucial.

Tabelas Hash

Conceitos fundamentais

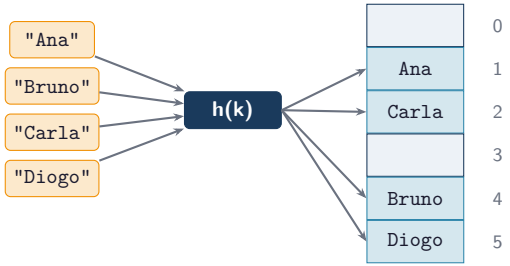
O que é uma Tabela Hash?

Definição

Estrutura de dados que armazena pares **(chave, valor)** em um vetor de tamanho M, usando uma **função de hash** $h(k)$ que mapeia cada chave k a um índice $i \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$.

Componentes principais

- **Universo** U: conjunto de todas as chaves possíveis
- **Tabela** T: vetor com M posições (*buckets*)
- **Função de hash** $h : U \to \{0, \ldots, M-1\}$
- **Tratamento de colisões**: o que fazer quando $h(k_1) = h(k_2)$



Características de uma Boa Tabela Hash

Função de hash ideal

- **Determinística**: mesma chave → mesmo índice
- **Rápida** de calcular: $O(1)$
- **Uniforme**: distribui as chaves uniformemente sobre $\{0, \ldots, M-1\}$
- **Minimiza colisões**

Observação importante

Como $|U| \gg M$ (universo bem maior que a tabela), **colisões são inevitáveis** pelo *Princípio da Casa dos Pombos*. O segredo está em **tratá-las** bem.

Fator de carga

$$\alpha = \frac{n}{M}$$

onde n é o número de elementos e M é o tamanho da tabela.

- α pequeno $\Rightarrow$ poucas colisões, espaço desperdiçado
- α grande $\Rightarrow$ muitas colisões, busca degrada
- Recomendado: $\alpha \leq 0{,}75$

Funções de Hash

Como mapear chaves em índices

Método da Divisão

Definição

A função mais simples: o índice é o **resto da divisão** da chave por M.

$$h(k) = k \bmod M$$

Recomendações

- Escolher M **primo** e distante de potências de 2
- Evitar $M = 2^p$ (usa só os p últimos bits)
- Cálculo extremamente rápido

Exemplo: $M = 7$

k	$h(k) = k \bmod 7$	**posição**
15	1	T[1]
22	1	T[1] (colisão!)
31	3	T[3]
44	2	T[2]
50	1	T[1] (colisão!)

Método da Multiplicação

Definição

Multiplica a chave por uma constante A $(0 < A < 1)$ e usa a parte fracionária multiplicada por M:

$$h(k) = \lfloor M \cdot (k \cdot A \bmod 1) \rfloor$$

Vantagens

- M pode ser qualquer valor (ex.: potência de 2)
- $A = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618$ (Knuth)
- Distribui melhor que o método da divisão para certas chaves

Outras estratégias

Dobra (folding): divide a chave em partes e soma

Meio do quadrado: eleva k ao quadrado e usa os dígitos centrais

Hash de strings: combina os códigos ASCII dos caracteres

Hash para strings (Java-like)

```
h = 0; para cada char c em s:
  h = 31 * h + c;
retorne h % M;
```

Tratamento de Colisões

Encadeamento e Endereçamento Aberto

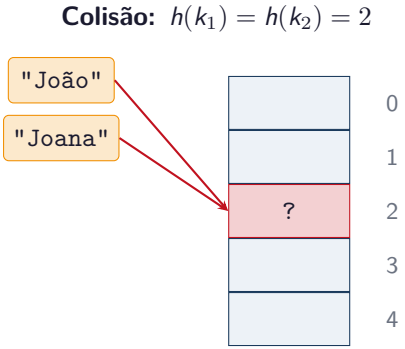
O Problema das Colisões

Definição

Ocorre uma **colisão** quando duas chaves diferentes $k_1 \neq k_2$ produzem o mesmo índice: $h(k_1) = h(k_2)$.

Estratégias principais

1. **Encadeamento separado** (*separate chaining*): cada posição armazena uma lista
2. **Endereçamento aberto** (*open addressing*): procura outra posição vazia na própria tabela
   - Sondagem linear
   - Sondagem quadrática
   - Hash duplo



Encadeamento Separado

Como funciona

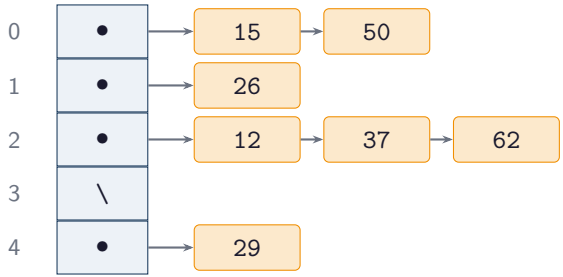
Cada posição $T[i]$ guarda o ponteiro para uma **lista encadeada** com todas as chaves cujo hash é i.

Operações

- **Inserir**: insere no início da lista de $T[h(k)]$
- **Buscar**: percorre a lista de $T[h(k)]$
- **Remover**: encontra e remove da lista

Custo

Médio: $O(1+\alpha)$. Tabela nunca "enche".



$M = 5$, função: $h(k) = k \bmod 5$

Como funciona

Se $T[h(k)]$ está ocupada, tenta a **próxima posição**, e a próxima, e assim por diante (de forma circular).

$$h_i(k) = (h(k) + i) \bmod M, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

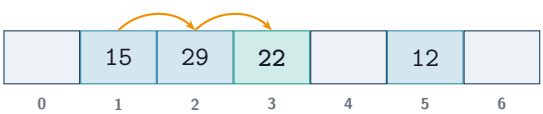
Problema: agrupamento primário

Tende a formar **grandes blocos contíguos** de posições ocupadas, aumentando o tempo de busca.

Importante

Para remover, é preciso usar uma **marca de removido** (*tombstone*) ou rehash dos elementos do cluster.

Inserindo 22 com $h(k) = k \bmod 7$
$h(22) = 1$, *mas T[1] e T[2] ocupados*



Inserido em T[3] após 2 sondagens

Sondagem Quadrática e Hash Duplo

Sondagem quadrática

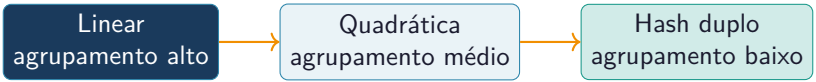
$$h_i(k) = (h(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod M$$

- Reduz o agrupamento primário
- Pode ainda ter **agrupamento secundário**: chaves com mesmo $h(k)$ seguem a mesma sequência
- Requer M primo e $\alpha < 0{,}5$ para garantir varredura completa

Hash duplo

$$h_i(k) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod M$$

- Usa **duas funções** de hash
- $h_2(k)$ deve ser coprimo com M
- **Distribui melhor:** cada chave segue uma sequência diferente
- Considerada uma das melhores estratégias



Encadeamento vs. Endereçamento Aberto

Critério	Encadeamento	End. Aberto
Estrutura externa	lista encadeada	nenhuma (in-place)
Memória	ponteiros extras	somente o vetor
Fator de carga α	pode ser > 1	deve ser < 1
Remoção	simples	exige *tombstone*
Cache	pior (saltos de memória)	melhor (localidade)
Tabela cheia	não acontece	precisa redimensionar

▪ Rehashing

Quando α ultrapassa o limite (tipicamente $0{,}75$), cria-se uma **nova tabela** com tamanho $\approx 2M$ (próximo primo) e **reinsere-se** todos os elementos. O custo amortizado de inserção permanece em $O(1)$.

Implementação

Estrutura em C

Estrutura típica em C — Encadeamento

hash.h — Definição e função de hash

```c
#define M 101  /* primo */
typedef struct No {
    int chave;
    int valor;
    struct No *prox;
} No;

typedef struct {
    No *tabela[M];
    int n;
} Hash;

int h(int chave) {
    return chave % M;
}
```

hash.c — Inserção

```c
void inserir(Hash *H, int k, int v) {
    int i = h(k);
    No *novo = malloc(sizeof(No));
    novo->chave = k;
    novo->valor = v;
    novo->prox  = H->tabela[i];
    H->tabela[i] = novo;
    H->n++;
}

No* buscar(Hash *H, int k) {
    No *p = H->tabela[h(k)];
    while (p != NULL) {
        if (p->chave == k) return p;
        p = p->prox;
    }
    return NULL; /* nao
```

Exercício

Implementação da Tabela Hash

Implemente uma Tabela Hash com o seguinte menu

1. **Inserir** um par (chave, valor) na tabela
2. **Buscar** um valor a partir da chave
3. **Remover** um par a partir da chave
4. **Listar** todos os pares armazenados
5. **Mostrar** o estado de cada *bucket* (índice $\rightarrow$ lista)
6. Exibir **estatísticas**: n, M, α, maior lista, número de colisões
7. **Redimensionar** (rehash) quando $\alpha > 0{,}75$
8. Fechar

Atenção

Implemente **duas versões**: uma com **encadeamento separado** e outra com **endereçamento aberto** (sondagem linear). Compare o número de colisões para o mesmo conjunto de chaves.

Fim da Aula 12

Dúvidas e próximos passos

Próxima Aula e Referências

Próxima aula — Grafos

- Representação: **matriz de adjacência** e **lista**
- Busca em largura (**BFS**) e em profundidade (**DFS**)
- Aplicações: redes, caminhos mínimos
- Algoritmos de Dijkstra e Kruskal

Referências

- CORMEN et al. *Introduction to Algorithms*, 4ª ed. Cap. 11.
- TENENBAUM et al. *Estruturas de Dados em C*.

Resumo da Aula 12

- Hash mapeia chave → índice em $O(1)$
- Colisões: inevitáveis pelo Princípio do Pombal
- Encadeamento: listas por bucket
- Endereçamento aberto: sondagem linear / quadrática / duplo
- Rehashing quando $\alpha > 0{,}75$

Dúvidas?

carolsoko@ifba.edu.br

IFBA – Campus Feira de Santana